

Technisches Messen

Modelbasierte Vermessung verteilter Phänomene und Generierung optimaler Messsequenzen

Model-based Reconstruction of Distributed Phenomena and Optimal Sensor Placement

Dipl.-Ing. Dietrich Brunn: Institut für Technische Informatik, Universität Karlsruhe (TH), Kaiserstr., 12, 76128 Karlsruhe, Deutschland
Tel: 0721/608-4354, E-Mail: brunn@ira.uka.de

Dipl.-Ing. Dietrich Brunn ist seit November 2003 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Informatik der Universität Karlsruhe (TH). **Hauptarbeitsgebiete:** Nichtlineare System- und Schätztheorie, Sensoreinsatzplanung in Sensornetzwerken, effiziente Kalibrierverfahren

Dipl.-Ing. Felix Sawo: Institut für Technische Informatik, Universität Karlsruhe (TH), Kaiserstr., 12, 76128 Karlsruhe, Deutschland
Tel: 0721/608-4024, E-Mail: sawo@ira.uka.de

Dipl.-Ing. Felix Sawo ist seit Juli 2005 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Informatik der Universität Karlsruhe (TH). **Hauptarbeitsgebiete:** System- und Schätztheorie in Sensor-Aktor-Netzwerken, Dezentrale Informationsfusion, Rekonstruktion verteilter Phänomene

Prof. Dr.-Ing. Uwe D. Hanebeck: Institut für Technische Informatik, Universität Karlsruhe (TH), Kaiserstr. 12, 12, 76128, Deutschland
Tel: 0721/608-4024, E-Mail: hanebeck@ira.uka.de

Prof. Dr.-Ing. Uwe D. Hanebeck ist Leiter des Lehrstuhls "Intelligente Sensor-Aktor Systeme" am Institut für Technische Informatik der Universität Karlsruhe (TH). **Hauptarbeitsgebiete:** Nichtlineare System- und Schätztheorie, Methoden für Sensor-Aktor-Netzwerke, Telepräsenzsysteme, Robotik, Medizintechnik und persönliche assistive Systeme

Keywords: Information fusion, distributed system, sensor scheduling, PDE, Kalman filter

Schlagworte: Informationsfusion, verteilte Systeme, Sensoreinsatzplanung, PDE, Kalman-Filter

MS-ID:

brunn@ira.uka.de

16. Januar 2007

Heft: / ()

Abstract

This article addresses the model-based reconstruction and prediction of distributed phenomena characterized by partial differential equations. The novelty of the proposed reconstruction method is the systematic approach and the consideration of uncertainties, which occur in the physical model and arise naturally from noisy measurements. By these means, it is possible to reconstruct the complete density function of the state characterizing the distributed phenomenon. It is shown how the partial differential equation, i.e., *distributed*-parameter system, is spatially and temporally decomposed leading to a *lumped*-parameter *finite*-dimensional state space form. Based on the state space form, classical estimators, e.g. Kalman filter, can directly be applied for the estimation of the solution of the underlying partial differential equation. Furthermore, a method for the optimal sensor placement is introduced. This method makes it possible to derive an optimal sequence of measurements in order to minimize the costs of measurements for a given uncertainty of the estimation result. The performance of the proposed methods is demonstrated by means of two scenarios, i.e., a temperature distribution and a deformation of a bearing. Finally, challenges of the treatment of nonlinear systems and problems of a decentralized information fusion, necessary for large sensor networks, are stated.

Zusammenfassung

Dieser Beitrag befasst sich mit modellbasierten Methoden zur Vermessung verteilter physikalischer Phänomene. Diese Methoden zeichnen sich durch eine systematische Behandlung von Unsicherheiten aus, so dass neben der Rekonstruktion der vollständigen Wahrscheinlichkeitsdichte der relevanten Größen aus einer geringen Anzahl von zeit-, orts- und wertdiskreten Messungen auch die Generierung optimaler Messsequenzen möglich ist. Es wird dargestellt, wie eine Beschreibung für ein verteilt-parametrisches System in Form einer partiellen Differentialgleichung, welche einen unendlich-dimensionalen Zustandsraum beschreibt, in eine konzentriert-parametrische Form konvertiert wird. Diese kann als Grundlage für den Entwurf klassischer Schätzer, wie z. B. des Kalman-Filters, dienen. Ferner wird eine Methode zur Sensoreinsatzplanung vorgestellt, mit der eine optimale Sequenz von Messparametern bestimmt werden kann, um mit einem minimalen Messaufwand die Unsicherheit auf ein gewünschtes Maß zu reduzieren. Die Anwendung dieser Methoden wird an zwei Beispielen, einer Temperaturverteilung und der Verformung einer Führungsschiene, demonstriert. Zusätzlich werden die Herausforderungen bei der Behandlung nichtlinearer Systeme und die Probleme bei der dezentralen Verarbeitung, wie sie typischerweise beim Einsatz von Sensornetzwerken auftreten, diskutiert.

1 Einleitung

Räumlich verteilte Systeme zeichnen sich dadurch aus, dass die betrachteten Größen sich mit der Zeit und mit dem Ort ändern. Typische Beispiele sind Temperaturverteilungen in Räumen und Festkörpern, Verteilungen von Schadstoffkonzentrationen in Gewässern oder Verformungen von Maschinenteilen.

Die Beobachtung, Überwachung und Vermessung von räumlich konzentrierten Größen, wie z. B. elektrische Spannungen oder Fahrzeuggeschwindigkeiten, sind die klassischen Kernaufgaben der Zustandsschätzung. Dabei wird aus Messungen gewonnene Information mit bereits vorhandener Information fusioniert. Für diese Fusion gibt es eine Vielzahl von Verfahren [17], wie das Kalman-Filter [10] und seine Derivate: Partikel-Filter [6] und analytische Filter, wie z. B. Filter auf Basis von Gaußmischverteilungen [1, 9]. Eine Voraussetzung für die Anwendung solcher Verfahren ist eine konzentriert-parametrische endlich-dimensionale Systembeschreibung. Für verteilte Systeme ist diese Annahme allerdings in der Regel nicht erfüllt.

In diesem Artikel wird ein Überblick über neuartige Verfahren zur modellbasierten Rekonstruktion von physikalischen verteilten Systemen, auch verteilte Phänomene genannt, vorgestellt. Dabei soll aus zeit-, orts- und wertdiskreten Messungen das gesamte Phänomen, welches durch sogenannte Systemzustände charakterisiert wird, effizient rekonstruiert werden. Anhand von zwei anschaulichen Beispielanwendungen, nämlich einer Temperaturverteilung und der Verformung einer Führungsschiene, werden die neu entwickelten Ansätze zur Rekonstruktion verteilter Phänomene dargestellt und diskutiert.

Bei der Vermessung solcher verteilten Phänomene muss ein Kompromiss zwischen Genauigkeit und Realisierungsaufwand gefunden werden. In der Regel sind für den Realisierungsaufwand die Sensoranzahl sowie die Messrate entscheidende Größen.

Es werden Methoden vorgestellt, die es ermöglichen, durch Einbeziehung von (physikalischem) Hintergrundwissen in Form eines physikalischen Modells gute Ergebnisse bei vertretbarem Messaufwand zu erreichen. Durch diese Rekonstruktion ist es möglich, die charakterischen

Größen zu bestimmen, welche das verteilte Phänomen an *jedem Ort* und zu *jedem Zeitpunkt* vollständig beschreiben. Somit können also auch Aussagen über das Phänomen an Nichtmesspunkten getroffen werden und außerdem das zukünftige Verhalten präzisiert werden.

Weiterhin zeichnen sich diese Methoden durch eine systematische Berücksichtigung von Messunsicherheiten aus, die natürlicherweise bei realen Messungen, aber auch bedingt durch die Art der Modellierung, auftreten. Durch diese Betrachtungsweise ist es möglich, neben der Rekonstruktion der vollständigen Wahrscheinlichkeitsdichte der relevanten Größen aus einer geringen Anzahl von zeit-, orts- und wertdiskreten Messungen auch optimale Messsequenzen in Bezug auf die Messorte und die Messzeitpunkte zu generieren.

Der Artikel ist wie folgt gegliedert: Im folgenden Abschnitt wird auf die Beschreibung von räumlich verteilten physikalischen Phänomenen durch partielle Differentialgleichungen (PDE¹) eingegangen. Danach werden in Abschnitt 3 Methoden vorgestellt, welche verteilt-parametrische Systeme in konzentriert-parametrische Systeme konvertieren. Die Methoden zeichnen sich durch eine adäquate Approximation des auftretenden unendlich-dimensionalen Zustandes durch einen endlich-dimensionalen Zustandsvektor aus. Dadurch können die klassischen Schätzverfahren angewendet werden, wie Abschnitt 4 aufzeigt. Die Methode zur Bestimmung von geeigneten Messparametern wird in Abschnitt 5 vorgestellt. Abschnitt 6 diskutiert Herausforderungen, die bei nichtlinearen Systemen und bei dezentraler Verarbeitung entstehen. Der Artikel schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick in Abschnitt 7. Die Resultate in diesem Artikel basieren auf der Veröffentlichung [4].

2 Räumlich verteilte Phänomene

Es gibt eine Vielzahl von Methoden, um physikalische Phänomene mathematisch zu beschreiben. In diesem Artikel werden physikalische Phänomene als entweder statische oder dynamische Systeme und als entweder konzentriert-parametrische oder verteilt-parametrische Systeme klassifiziert. Ein statisches System verändert sich über die Zeit nicht, aber im Fall eines verteilt-parametrischen Systems sehr wohl über seine Ortsvariablen,

¹engl.: *partial differential equation*

währenddessen sich der Zustand eines dynamischen Systems zusätzlich mit der Zeit ändert.

Konzentriert-parametrische Systeme zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Parameter in einzelnen Raumpunkten *konzentriert* sind, d. h. die Parameter hängen nur von der Zeit, nicht aber vom Ort ab. Solche physikalischen Systeme lassen sich durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen beschreiben.

Ein Beispiel für ein konzentriert-parametrisches System ist das Flugverhalten eines Vogelschwarms. Position und Geschwindigkeit der einzelnen Vögel beschreiben den Zustand dieses Phänomens in erster Näherung vollständig.

Verteilt-parametrische Systeme haben die Eigenschaft, dass ihre Parameter nicht nur alleine von der Zeit abhängen. Vielmehr sind diese zusätzlich räumlich *verschmiert*, d. h. vom Ort abhängig. Zur Beschreibung eines räumlich verteilten Phänomens $p := p(z, t)$, wobei z den Ort angibt, werden Systeme von partiellen Differentialgleichungen (PDEs)

$$\mathbb{L}\left(p, \frac{\partial p}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^i p}{\partial t^i}, \frac{\partial p}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^j p}{\partial z^j}\right) = s \quad (1)$$

verwendet. Diese beschreiben die Wechselwirkung zweier zeitlich und räumlich benachbarter Punkte in Abhängigkeit von einer Eingangsfunktion $s := s(z, t)$.

In diesem Artikel werden als Beispiel für verteilt-parametrische Systeme eine Temperaturverteilung und eine Verformung einer Schiene diskutiert. Im Gegensatz zum Vogelschwarm gibt es an jedem kontinuierlichen Raumpunkt eine Temperatur bzw. eine Verformung.

Die allgemeine Lösung $p(z, t, \underline{x}^\infty)$ von (1) in Abhängigkeit vom Parameter- oder Zustandsvektor \underline{x}^∞ ist im Allgemeinen unendlich-dimensional. Im nächsten Abschnitt werden Verfahren zur Approximation von \underline{x}^∞ durch einen endlich-dimensionalen Vektor vorgestellt.

3 Modellkonversion

Wie im vorherigen Abschnitt erläutert, führt die Modellierung eines verteilten Phänomens im Allgemeinen auf eine verteilt-parametrische Systembeschreibung. Da allerdings eine direkte Verwendung dieser Systembeschreibung für Rekonstruktionszwecke sehr komplex ist, ist

typischerweise eine Konversion in ein endlich-dimensionales Zustandsraummodell zweckmäßig. In diesem Abschnitt wird nun detailliert auf die Konversion eines unendlich-dimensionalen Systems in ein endlich-dimensionales System eingegangen. Für die spätere Rekonstruktion stellt dies einen essentiellen Verfahrensschritt dar, da sich ein verteilt-parametrisches System im Allgemeinen nicht mit einer endlichen Anzahl von Parametern darstellen lässt.

Die Kernidee des hier vorgestellten Ansatzes basiert darauf, das verteilte Phänomene $p(z, t)$ durch eine Reihe

$$p(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i(z) x_i(t) \quad (2)$$

von orstabhangigen Basisfunktionen $\Psi_i(z)$ und ihren zugehörigen zeitveränderlichen Gewichtsfunktionen $x_i(t)$ darzustellen. Dies ermöglicht eine effiziente Rekonstruktion von $p(z, t)$. Um ein endlich-dimensionales System zu erhalten, wird die Reihe bei N_{dof} abgebrochen², so dass nur noch der konzentriert-parametrische Zustandsvektor

$$\underline{x}(t) = [x_0(t), \dots, x_{\text{dof}}(t)]^T$$

bestimmt werden muss. Dafür existieren in der klassischen Schatzttheorie eine Vielzahl von Verfahren.

Die Bestimmung des Approximationsfehlers für gegebenes N_{dof} ist ein noch ungelöstes Problem. Lediglich für den Spezialfall, dass die Randbedingungen das verteilte Phänomen $p(z, t)$ so einschränken, dass die Reihe (2) an sich endlich ist, können Aussagen über den Approximationsfehler getroffen werden.

In den nächsten beiden Abschnitten werden statische und dynamische verteilt-parametrische Systeme diskutiert.

3.1 Statische Systeme

Statische verteilt-parametrische Systeme haben die Eigenschaft, dass sie über die Zeit als unveränderlich angenommen werden. Ein typisches Beispiel für solche Anwendungen ist die effiziente Vermessung einer verformten Führungsschiene in Werkzeugmaschinen zur Kalibrierung, siehe Bild 1. Für den hier betrachteten statischen Fall verschwinden die zeitlichen Ableitungen und

²Die Abkürzung *dof* steht für den Freiheitsgrad (engl.: degree of freedom) des konzentriert-parametrischen Systems.

die Funktionsreihe (2) vereinfacht sich zu

$$\tilde{p}(z) = \sum_{i=0}^{N_{\text{dof}}-1} \Psi_i(z) x_i . \quad (3)$$

Betrachtet man das Beispiel der verformten Führungsschiene mit diskreten Befestigungspunkten näher, erhält man für kleine Durchbiegungen $\partial p(z)/\partial z \ll 1$ die eindimensionale PDE

$$EI_0 \frac{\partial^4 p(z)}{\partial z^4} = s(z) , \quad (4)$$

wobei E das Elastizitätsmodul und I_0 das axiale Flächenmoment 2. Grades ist [7]. Es lässt sich zeigen, dass zwischen zwei Befestigungspunkten l und $(l+1)$ die Lösung von (4)

$$p(z) = a_l + b_l(z - z_0) + c_l(z - z_0)^2 + d_l(z - z_0)^3 \quad (5)$$

ein kubischer Spline ist. In [3] wird gezeigt, dass sich das kubische Spline (5) in die Form der Funktionsreihe (3) überführen lässt.

3.2 Dynamische Systeme

Wie schon erwähnt, kann das zeitliche und räumliche Verhalten eines physikalischen Phänomens durch partielle Differentialgleichungen (PDE) beschrieben werden. Zum besseren Verständnis wird in diesem Beitrag exemplarisch für $p := p(z, t)$ eine eindimensionale lineare PDE

$$\mathbb{L} \left(p(z, t), \frac{\partial p}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^i p}{\partial t^i}, \frac{\partial p}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^j p}{\partial z^j} \right) = s \quad (6)$$

betrachtet, wobei $s := s(z, t)$ die äußere Anregungsfunktion (z. B. Wärmequellen, Wärmesenken, äußere Kräfte und Momente) beschreibt. Unter Einbeziehung von Randbedingungen, wie z. B. festen Randtemperaturen $p(z, t)$, $z \in \partial\Omega$, und Anfangsbedingungen $p(z, t=0)$ kann dann für eine Vielzahl von relevanten Problemen eine Lösung $p(z, t)$ der PDE gefunden werden, die das Phänomen abhängig vom Ort z und Zeit t beschreibt.

Für die Konversion des *dynamischen* verteilt-parametrischen Systems in ein konzentriert-parametrisches System stehen mehrere bekannte Methoden zur Verfügung: die Methode der finiten Differenzen (FDM)

[2], die Methode der finiten Elemente (FEM) und die Spektral-Element-Methode (SEM) [11]. Bei diesen Verfahren werden als Basisfunktionen $\Psi_i(z)$ in der Regel Fourierreihen (Modalanalyse) [18], orthogonale Polynome, Hermite-Polynome oder Tschebyscheff-Polynome verwendet. Diese sind aber nicht über das gesamte Berechnungsgebiet Ω definiert, sondern nur über ein oder mehrere nicht überlappende Teilgebiete Ω_i . Dadurch wird die Modellierung von komplexen Geometrien von Ω und komplexen Randbedingungen $\partial\Omega$ erleichtert. Ferner ermöglicht dies die Modellierung nichtlinearer PDEs. Damit erhält man die orts- und zeitabhängige Funktionenreihe (2), mit der die PDE (6) in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbb{L}(t, \underline{x}(t), \underline{u}(t)) \quad (7)$$

konvertiert werden kann.

Das entstandene konzentriert-parametrische System (7) kann nun zur Simulation des unterlagerten verteilten Systems verwendet werden, indem die Entwicklung des endlich-dimensionalen Zustands $\underline{x}(t)$ über der Zeit berechnet wird. Zu diesem Zweck wird ein geeigneter Löser für die kontinuierliche Systemgleichung (7) verwendet. Die gesuchten ortskontinuierlichen Werte $p(z, t)$ des unterlagerten verteilten Systems werden dann über die Ausgangsgleichung aus dem Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ berechnet.

Unser Ziel ist nun aber nicht die Simulation des verteilten Systems, sondern die Rekonstruktion des gesamten ortskontinuierlichen Phänomens aus indirekt gegebenen zeit-, orts- und wertdiskreten realen, d. h. *unsicheren* Messungen. Dabei werden im Allgemeinen geeignet parametrisierte Wahrscheinlichkeitsdichten zur Beschreibung der Unsicherheit der geschätzten Zustände verwendet.

Selbstverständlich kann zur zeitlichen Fortschreibung dieses erweiterten Zustandsvektors die kontinuierliche Systemgleichung (7) verwendet werden. Aus Komplexitätsgründen bietet es sich aber an, zunächst eine Zeitdiskretisierung der Systemgleichung (7) in einer geeigneten Form vorzunehmen und das resultierende Differenzgleichungssystem erster Ordnung schließlich zur Fortschreibung dieses erweiterten Zustandsvektors über diskrete Zeitpunkte zu verwenden. Durch eine Zeitdiskretisierung erhält man also eine klassische zeitdiskrete

lineare Zustandsgleichung

$$\underline{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \underline{x}_k + \mathbf{B}_k \underline{u}_k + \underline{w}_k, \quad (8)$$

wobei \mathbf{A}_k die quadratische Systemmatrix, \mathbf{B}_k die Eingangsmatrix und \underline{u}_k der Eingangsvektor ist. Der Unsicherheitsterm \underline{w}_k wurde hinzugefügt, um den Modellierungsungenauigkeiten Rechnung zu tragen.

Genau diese Berechnung der Unsicherheitsterme stellt eine der Hauptschwierigkeiten bei der Konversion in ein endlich-dimensionales System dar. Dies betrifft sowohl die exogenen Störungen, also die Umrechnung von verteilten Störungen in konzentrierte Störquellen als auch die endogenen Störungen, d. h. die Berücksichtigung von Modellierungs- und Approximationsunvollkommenheiten.

Im nächsten Abschnitt wird ein Wärmestab als Beispiel für ein dynamisches verteilt-parametrisches System diskutiert. Eine ausführliche Beschreibung zur Konvertierung des dynamischen verteilt-parametrischen Systems in eine zeit diskrete Zustandsgleichung findet sich in [16].

4 Rekonstruktion

Für eine modellbasierte Rekonstruktion eines verteilten Phänomens benötigt man neben der Systemgleichung noch eine Messgleichung, welche die Wirkung des Phänomens auf konkrete Messungen beschreibt (siehe Bild 2). Mit der im vorherigen Abschnitt aufgezeigten Beschreibung verteilter Phänomene ist es nun möglich, aus zeit-, orts- und wertdiskreten Messungen auf das gesamte Phänomen zu schließen.

Dazu benötigt man zunächst eine Abbildung, welche den Zusammenhang einer Messung $\hat{y}_k \in \mathbb{R}^n$ und des verteilten Phänomens $p(z, t_k)$ beschreibt. Die so genannte Messgleichung

$$\hat{y}_k = \underline{h}_k(p(z, t_k)) + \underline{v}_k \quad (9)$$

bildet mit der Funktion $\underline{h}_k(\cdot)$ das verteilte Phänomen $p(z, t_k)$ auf die Messung \hat{y}_k ab. \underline{v}_k repräsentiert die Messunsicherheit, welche die Unvollkommenheiten einer realen Messung subsummiert. Selbst für recht einfache in der Praxis vorkommende Messprinzipien ist die Abbildungsfunktion $\underline{h}_k(\cdot)$ nichtlinear, was folglich die An-

wendung von nichtlinearen Schätzverfahren erforderlich macht.

Neben der Messgleichung (9) benötigt man im Rahmen einer Vorwärtsmodellierung noch eine Ausgangsgleichung, welche die punktuell gemessenen Werte des verteilten Phänomens $p(z, t_k)$ direkt auf den endlich-dimensionalen Zustandsvektor \underline{x}_k der PDE abbildet.

$$p(z, t_k) = \mathbf{C}_k \underline{x}_k + \underline{v}_k^*, \quad (10)$$

wobei \underline{v}_k^* die Unsicherheiten durch die Messung und durch die Approximation beinhaltet.

Wird die Ausgangsgleichung (10) in die Messgleichung (9) eingesetzt, erhält man das vollständige Messmodell, welches es ermöglicht, mit zeit-, orts- und wertdiskreten Messwerten unter Zuhilfenahme klassischer Schätzverfahren eine verbesserte Schätzung des Zustandsvektors \underline{x}_k zu ermitteln. Für lineare Gleichung liefert das wohlbekannte Kalman-Filter [10] exakte Lösungen. Wohingegen für nichtlineare Gleichungen approximative Schätzverfahren, wie erweiterte Kalman-Filter [13] oder Partikel-Filter, eingesetzt werden müssen. Aufgrund der Eigenschaft eines universellen Approximators, eignen sich Gaußmischverteilungen besonders gut zur Approximation [9].

Am Beispiel des eindimensionalen Wärmeleiters mit der Länge $L = 1$ wird nun ein verteiltes Phänomen mit Hilfe des geschätzten Zustands eines fortschreitenden Systemmodells rekonstruiert und präzisiert, wobei die äußere Anregung die Form $s(z, t) = 30 \sin(2t) + 30$ haben soll. Der geschätzte Zustand des Systemmodells wird mittels aktueller Messungen von Zeit zu Zeit an das wahre System angepasst. Dabei wird angenommen, dass das Sensornetzwerk lediglich aus zwei Sensoren an den Positionen $z_{s1} = 0,25$ und $z_{s2} = 0,75$ besteht.

Der auf der Basis der physikalischen Modellierung und der Messungen rekonstruierte Lösungsverlauf $p(z, t)$ der eindimensionalen Wärmeleitung ist in Bild 3 (a) dargestellt. In Bild 3 (b) ist der rekonstruierte Lösungsverlauf für einen Nicht-Messpunkt ($z = 0,5$) dargestellt, dabei ist der rot gepunktete Funktionsverlauf die analytische Lösung des Wärmeleiters, der blaue Funktionsverlauf der vom Kalman-Filter geschätzte Wert und der grün gestrichelte Funktionsverlauf stellt das 3 σ -Konfidenzintervall dar. Es wird deutlich, dass durch einen modellbasierten Ansatz bei der Rekonstruktion

die Genauigkeit des Schätzergebnisses drastisch verbessert werden kann, insbesondere an Nicht-Messpunkten.

5 Sensoreinsatzplanung

Ziel der Sensoreinsatzplanung ist es, bestmögliche Messparameter für zukünftige Messungen zu bestimmen. Bestmöglich heißt hier: maximaler Informationsgewinn unter Nebenbedingungen, wie z. B. begrenzter Energieverbrauch. Messparameter können beispielsweise der zu verwendende Sensorknoten in einem Sensornetz sein oder die Position eines Messkopfes.

Das Prinzip der Sensoreinsatzplanung soll am Beispiel der Vermessung einer verformten Führungsschiene (Bild 1, Abschnitt 3.1) aus [3] erklärt werden. Es wird der zweidimensionale Fall $p(z, \underline{x}) = [p_x(z, \underline{x}) \ p_y(z, \underline{x})]^T$ für Höhen- und Seitenschlag mit gaußverteilten Unsicherheiten betrachtet. Es werden sechs Stützstellen angenommen; Somit ist \underline{x} sechsdimensional und ebenfalls gaußverteilt. Die Verformung der Schiene lässt sich durch den Erwartungswert \hat{x} und die Kovarianzmatrix C von \underline{x} vollständig beschreiben.

Ferner sind Punktmessungen an beliebigen Positionen z_M möglich. Deren Unsicherheit wird hier durch additives Gaußrauschen modelliert. Bild 4(a) zeigt eine initiale Schätzung $p(z, \underline{x}_0)$ für das zweidimensionale Spline mit zugehörigem *Unsicherheitsschlauch*. Die initiale Schätzung ist hier eine Gerade, welche blau gekennzeichnet ist. Der *Unsicherheitsschlauch* ist die Verallgemeinerung des 1σ -Konfidenzintervalls der eindimensionalen Gaußdichte. Der Schnitt entlang eines Punktes z_0 , welcher immer eine Ellipse ist, ist die minimale Fläche, in welcher der gesuchte Wert der Messgröße mit einer Wahrscheinlichkeit von 39,5 Prozent liegt.

Es ist das Ziel, mit einer möglichst geringen Anzahl an Messungen die Schiene möglichst genau zu vermessen. Dazu wird für die k -te Messung ein Gütemaß

$$J_k = \int_{\Omega} \text{Var}\{p_x(z, \underline{x}_k)\} + \text{Var}\{p_y(z, \underline{x}_k)\} dz$$

definiert, welches die ortskontinuierliche Varianz von p_x und p_y über das Spline aufintegriert. Je kleiner das Gütemaß J_k ist, desto besser ist die Qualität der Schätzung und desto schmaler der *Unsicherheitsschlauch*. Einen Überblick über die Wahl von geeigneten

Gütemaße findet sich in [5].

Das Vorgehen bei der Sensoreinsatzplanung beginnt damit, dass aus der aktuellen Schätzung (\hat{x}_k, C_k) das Gütemaß $J_{k+1}(z_M, \hat{x}_k, C_k)$ in Abhängigkeit von der Messposition z_M prädiert wird. Bild 4(b) zeigt das prädierte Gütemaß $J_1(z_M, \hat{x}_0, C_0)$ für ein zweidimensionales Spline.

Dann wird die beste Messposition

$$z_{M,\text{opt}} = \arg \min_{z_M} \{J_{k+1}(z_M, \hat{x}_k, C_k)\}$$

bestimmt, welche dann als Messparameter für die $k+1$ Messung verwendet wird. Danach wird die Messung durchgeführt und J_{k+2} bestimmt. Es können natürlich auch l zukünftige Positionen $z_{M,\text{opt}}$ berechnet werden und dann l mal gemessen werden.

Bild 4(b) zeigt ein Minimum bei der Position $z_{M,\text{opt}} = 1,5$ und Bild 4(c) die Schätzung nach der entsprechenden Messung. Man sieht deutlich, dass sich an der Position z_M und deren Umgebung die Form der Splineapproximation sowie der *Schlauchdurchmesser* geändert haben. Zusätzlich ist im Bild 4(d) das Ergebnis nach sechs Messungen dargestellt.

Im linearen Fall mit Gaußverteilungen ist die Berechnung recht einfach möglich, da das Kalman-Filter die Vorabrechnung der Kovarianzmatrix C_k ohne Kenntnis des konkreten Messwerts y_k erlaubt. Für kubische Splines lässt sich zeigen, dass $J_{k+1}(z_M, \hat{x}_k, C_k)$ ein stückweise definiertes Polynom 12. Ordnung ist [3].

6 Herausforderungen: Dezentralität und Komplexität

In diesem Abschnitt werden zwei wichtige Probleme bei der Rekonstruktion von verteilten Systemen diskutiert: Die Zunahme der Komplexität bei nichtlinearen Systemen, sowie die Dezentrale Verarbeitung bei verteilten Sensoren, z. B. in Sensornetzen.

Neben der Ausgangsgleichung benötigt man, wie im Abschnitt 4 gezeigt, im Rahmen einer Vorwärtsmodellierung noch eine Messgleichung, welche die Wirkung des Phänomens auf konkrete Messungen beschreibt, wobei diese im Allgemeinen nichtlinear ist. Aufgrund dieser Nichtlinearität ergibt sich bei einer rekursiven Verwendung von Messungen zum Zweck der Rekonstruktion

selbst für den Fall von linearen System- und Ausgangsgleichung bei einer exakten Berechnung ein Anwachsen der Komplexität der Wahrscheinlichkeitsdichten mit einer wachsender Anzahl an Messungen, siehe Bild 5 (a). Im Allgemeinen ändert sich zudem der Typ der Dichtefunktion. Für eine effiziente rekursive Verarbeitung ist eine Approximation der entstehenden Wahrscheinlichkeitsdichten also unumgänglich (Punkt A in Bild 5 (a)). Das Ziel ist dabei eine Approximation mit einem generischen parametrischen Dichtetyp für alle Zeitschritte und Positionen, wobei die Anzahl der Parameter in Abhängigkeit von der zur Verfügung stehenden Rechenleistung nach oben begrenzt sein sollte.

Da bekannte parametrische Dichtedarstellungen typischerweise unter den im Netzwerk auftretenden Operationen nicht abgeschlossen sind, bestehen zwei Möglichkeiten zur Approximation. Einerseits könnte man die auftretenden Systeme approximieren, z. B. durch eine Linearisierung. Dann könnten einfache Schätzverfahren, wie beispielsweise das erweiterte Kalman-Filter zum Einsatz kommen, was aber bei stark nichtlinearen Systemen nicht zum gewünschten Ergebnis führt. Es ist daher meist besser, das Ergebnis des exakten Verarbeitungsschrittes für das Originalsystem in jedem Schritt zu approximieren. Zu diesem Zweck existiert eine Vielzahl von Schätzverfahren, wie beispielsweise das Partikel-Filter [6].

Eine systematische Minimierung eines vorgegebene Abstandsmaßes zwischen der wahren Dichte und einer generischen Dichteapproximation wird in [9] vorgeschlagen, wobei gleichzeitig die Anzahl der Parameter begrenzt wird. Die Berechnung der optimalen Dichteparameter ist ein kompliziertes Optimierungsproblem, so dass Standardoptimierungsverfahren meist nicht zu befriedigenden Ergebnissen führen. Daher wurde in [9] ein progressives Schätzverfahren eingeführt, welches die notwendigen Verarbeitungsschritte progressiv durchführt. Bei der Auffrischung eines gegebenen Schätzwert mit Hilfe einer Messung bedeutet dies konkret, dass die entsprechenden Informationen graduell mit Hilfe einer Homotopie eingebracht werden. Auf der Basis dieser Progression kann dann ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen angegeben werden, welches die Variation der gesuchten Parameter beschreibt. Diese Differentialgleichungen werden nun an Stelle des originalen Optimierungsproblem über einem endlichen In-

tervall gelöst, woraus sich der gesuchte Parametervektor ergibt.

Bei verteilten Sensoren, wie z. B. in einem Sensornetzwerk, wird nun aus verschiedenen Gründen eine dezentrale Verarbeitung der Informationen in den einzelnen Knoten einer Verarbeitung in einem Zentralrechner vorgezogen. Aufgrund begrenzter Kommunikationskapazität und Speicherressourcen können dabei die Abhängigkeiten zwischen den auf unterschiedlichen Knoten gespeicherten Teilschätzungen nicht aufrechterhalten werden und gehen verloren. Als Beispiel betrachten wir wieder das in Bild 5 (b) dargestellte Netzwerk, in dem zwei Pfade vom Punkt A zum Punkt C dargestellt sind. Kombiniert man nun die an den Punkten B1 und B2 vorliegenden Informationen, so ist dazu deren Abhängigkeitsstruktur, also im Allgemeinen die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte, erforderlich. Da einer der Pfade aber über den Knoten B verläuft, sind diese Abhängigkeiten verloren gegangen.

Typischerweise wird nun in diesem Fall eine konkrete Abhängigkeit der beiden Größen angenommen. Für eine Beschreibung mit den ersten beiden Momenten ist dabei ein konkreter Wert für den Korrelationskoeffizienten zwischen den beiden Größen anzunehmen. Allerdings wird die Korrelation in der Praxis meist vernachlässigt. Diese Vernachlässigung ergibt aber eine ungerechtfertigt starke Verringerung der Unsicherheit, was beim Propagieren der Informationen durch das Netzwerk zu stark optimistischen Ergebnissen führt.

Für eine korrekte Kombination von mehreren unsicheren Informationen ist es also notwendig, alle möglichen Abhängigkeiten zu berücksichtigen. Für den Fall linearer Systeme mit Gauß'schen Unsicherheiten ist dieses Problem weitestgehend gelöst [8].

Werden die vorliegenden Informationen durch beliebige Wahrscheinlichkeitsdichten beschrieben, so entspricht die Berücksichtigung aller möglichen Abhängigkeiten der Berechnung aller Verbunddichten, die diese Wahrscheinlichkeitsdichten als Marginaldichten besitzen. Da eine Verarbeitung aller möglichen Verbunddichten analytisch kaum möglich ist, wurde in [14, 15] vorgeschlagen, untere und obere Dichten zu verwenden, welche die Menge aller möglichen Dichten einschließen. Mit einer entsprechenden Modifikation des Verarbeitungsschrittes [12] kann dann die Menge aller Ergebnisdichten berechnet werden, die durch untere und obere Dichten

dargestellt wird.

7 Schlussfolgerung und Ausblick

Dieser Beitrag befasst sich mit der Rekonstruktion von verteilten Phänomenen auf der Basis von gegebenen verteilt-parametrischen Modellen und zeit-, orts- und wertdiskreten Messungen. Neben einem tutoriellen Teil zur Einführung in die Problemstellung werden auch neue Ansätze und Verfahren dargestellt sowie einige Beispielanwendungen diskutiert.

Die Modellierung eines verteilten Phänomens führt im Allgemeinen auf eine verteilt-parametrische Systembeschreibung, welche typischerweise nicht direkt für Rekonstruktionszwecke geeignet ist. Deshalb ist eine Konversion in ein endlich-dimensionales Zustandsraummodell notwendig.

Im Fall eines *statischen* verteilt-parametrischen Systems ergibt sich dadurch ein statisches konzentriert-parametrisches System, welches den endlich-dimensionalen Zustandsvektor auf das ortskontinuierliche Phänomen abbildet. Im Fall der Konversion eines *dynamischen* verteilt-parametrischen Systems ergibt sich zusätzlich zu dieser statischen Abbildung ein konzentriert-parametrisches dynamisches System, welches die zeitliche Entwicklung des unterlagerten verteilt-parametrischen Systems (approximativ) beschreibt. Dieses wird typischerweise in Form eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems erster Ordnung dargestellt. Für den praktisch relevanten Fall zeitdiskreter Messungen ergibt sich bei einem dynamischen verteilt-parametrischen System insgesamt also eine gemischt diskret-kontinuierliche konzentriert-parametrische Systembeschreibung bestehend aus einer zeitdiskreten Ausgangsgleichung und einer zeitkontinuierlichen Systemgleichung.

Aus der zeitlichen Entwicklung des entstandenen konzentriert-parametrischen Systems, welches durch einen endlich-dimensionalen Zustand charakterisiert wird, kann mit Hilfe der Ausgangsgleichung das gesamte unterlagerte verteilte Phänomen berechnet werden. Um nun aus den gegebenen zeit-, orts- und wertdiskreten verrauschten Messungen das Phänomen zu rekonstruieren, werden im Allgemeinen Wahrscheinlichkeitsdichten zur Beschreibung der Unsicherheit in den geschätzten Zuständen verwendet. Zur zeitlichen Fortschreibung die-

ser Wahrscheinlichkeitsdichten könnte prinzipiell direkt das kontinuierliche Differentialgleichungssystem verwendet werden, wobei dieses zur besseren Handhabbarkeit durch eine Zeitdiskretisierung in ein Differenzgleichungssystem erster Ordnung umgewandelt wird.

Bei der Konversion in ein endlich-dimensionales System ist eine Hauptschwierigkeit die Behandlung der im verteilten System verteilt auftretenden Unsicherheiten. Hier steht eine durchgängige systematische Lösung insbesondere der Modellierungs- und Approximationsunvollkommenheiten noch aus und ist Gegenstand aktueller Forschung.

Neben der Ausgangsgleichung benötigt man im Rahmen einer Vorwärtsmodellierung noch eine Messgleichung, welche die Wirkung des Phänomens auf konkrete Messungen beschreibt, die im Allgemeinen nichtlinear ist. Damit ergibt sich bei einer rekursiven Verwendung von Messungen zum Zweck der Rekonstruktion bei einer exakten Berechnung ein Anwachsen der Komplexität der Wahrscheinlichkeitsdichten mit einer wachsender Anzahl an Messungen. Eine Approximation der entstehenden Wahrscheinlichkeitsdichten ist damit unumgänglich, wobei für diesen Zweck in [9] ein effizientes allgemeines Verfahren angegeben ist.

Im Fall der dezentralen Verarbeitung der Informationen können aus Gründen einer beschränkten Kommunikationskapazität und begrenzten Speicherressourcen die Korrelationen und Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Zuständen üblicherweise nicht gespeichert werden. Da für eine korrekte Kombination von unsicheren Informationen aber Wissen über deren Abhängigkeitsstruktur beispielsweise in Form einer Verbundwahrscheinlichkeitsdichte unabdingbar ist, wurden Verfahren entwickelt, die eine konsistente Kombination mit unbekanntem Verbundwahrscheinlichkeitsdichten ermöglichen. Der Fall für linearer Systeme mit Gauß'schen Unsicherheiten ist weitestgehend gelöst [8], erfordert aber nach ersten Ergebnissen für komplexere Wahrscheinlichkeitsdichten noch weitergehende Untersuchungen [14, 15].

Die in diesem Beitrag vorgestellten Verfahren zur Informationsfusion in verteilten Systemen basieren allesamt auf der approximativen Konversion des verteilten Systems in ein konzentriertes System, dessen Zustand dann mit Hilfe von Schätzverfahren für endlich-dimensionale Systeme rekonstruiert wird. Zukünftige Arbei-

ten werden sich mit der Entwicklung von Schätzverfahren für unendlich-dimensionale Systeme befassen, welche eine direkte Rekonstruktion des verteilten Systems ermöglichen.

Literatur

- [1] ALSPACH, DANIEL L. und HAROLD W. SORENSON: *Nonlinear Bayesian Estimation using Gaussian Sum Approximations*. IEEE Transactions on Automatic Control, 17(4):439–448, August 1972.
- [2] BAKER, A. J.: *Finite Element Computational Fluid Mechanics*. Taylor and Francis, 1983.
- [3] BRUNN, DIETRICH und UWE D. HANEBECK: *A Model-Based Framework for Optimal Measurements in Machine Tool Calibration*. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'05), 2005.
- [4] BRUNN, DIETRICH, FELIX SAWO und UWE D. HANEBECK: *Informationsfusion für verteilte Systeme*. In: BEYERER, J., F. PUENTE LEÓN und K.D. SOMMER (Herausgeber): *Informationsfusion in der Mess- und Sensortechnik*, Seiten 75–90. Universitätsverlag Karlsruhe, September 2006.
- [5] CHALONER, KATHRYN und ISABELLA VERDINELLI: *Bayesian Experimental Design: A Review*. Statistical Science, 10(3):273–304, August 1995.
- [6] DOUCET, ARNAUD, NANDO DE FREITAS und NEIL GORDON (Herausgeber): *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Kapitel 1, Seiten 6–12. Statistics for Engineering and Information Science. Springer-Verlag, 2001.
- [7] DUBBEL, HEINRICH: *Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer-Verlag Berlin, 20. Auflage, 2001.
- [8] HANEBECK, UWE D. und KAI BRIECHLE: *New Results for Stochastic Prediction and Filtering with Unknown Correlations*. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI'2001)*, 2001.
- [9] HANEBECK, UWE D., KAI BRIECHLE und ANDREAS RAUH: *Progressive Bayes: A New Framework for Nonlinear State Estimation*. In: *Proceedings of SPIE*, Band 5099. AeroSense Symposium, 2003.
- [10] KALMAN, RUDOLF EMIL: *A new Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*. Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering, 1960.
- [11] KARNIADAKIS, GEORGE und SPENCER J. SHERWIN: *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 2005.
- [12] KLUMPP, VESA, DIETRICH BRUNN und UWE D. HANEBECK: *Approximate Nonlinear Bayesian Estimation Based on Lower and Upper Densities*. In: *9th International Conference on Information (Fusion 2006)*, 2006.
- [13] PAPOULIS, ATHANASIOS: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 1991.
- [14] SAWO, FELIX, DIETRICH BRUNN und UWE D. HANEBECK: *Parameterized Joint Densities with Gaussian and Gaussian Mixture Marginals*. In: *9th International Conference on Information (Fusion 2006)*, 2006.
- [15] SAWO, FELIX, DIETRICH BRUNN und UWE D. HANEBECK: *Parameterized Joint Densities with Gaussian Mixture Marginals and their Potential Use in Nonlinear Robust Estimation*. In: *IEEE International Conference on Control Applications (CCA 2006)*, 2006.
- [16] SAWO, FELIX, KATHRIN ROBERTS und UWE D. HANEBECK: *Bayesian Estimation of Distributed Phenomena using Discretized Representations of Partial Differential Equations*. In: *3rd International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO'06)*, 2006.
- [17] TANIZKI, HISASHI: *Handbook of Statistics 21: Stochastic Processes and Simulation*, Kapitel Nonlinear and Non-Gaussian State-Space Modeling with Monte Carlo Techniques: A Survey and Comparative Study. North-Holland, 2003.
- [18] TAO, HAI und THOMAS S. HUANG: *Connected Vibrations: A modal Approach for Non-rigid Motion Tracking*. Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Seite 735, 1998.

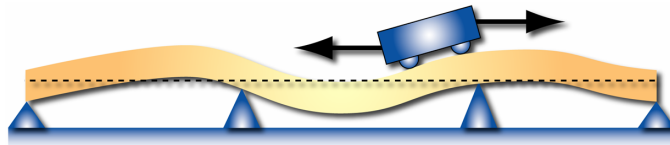


Abbildung 1: An diskreten Punkten gelagerte Führungsschiene mit Höhengschlag.

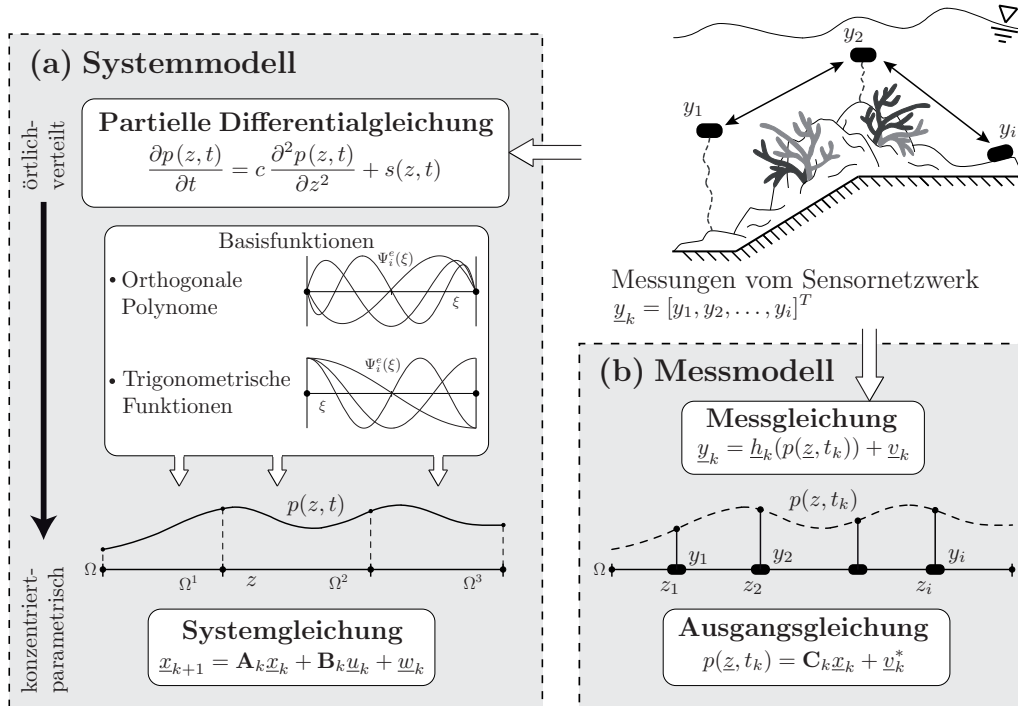


Abbildung 2: Schema und Bestandteile der modellbasierten Rekonstruktion verteilter Phänomene. (a) Systemmodell und (b) Messmodell.

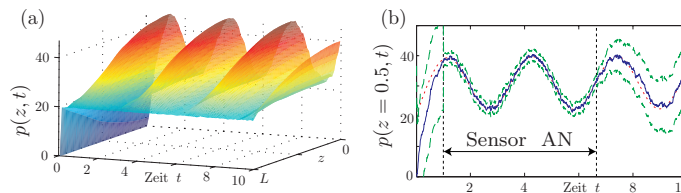


Abbildung 3: Ergebnis der modellbasierten Rekonstruktion einer eindimensionalen Wärmeleitung.

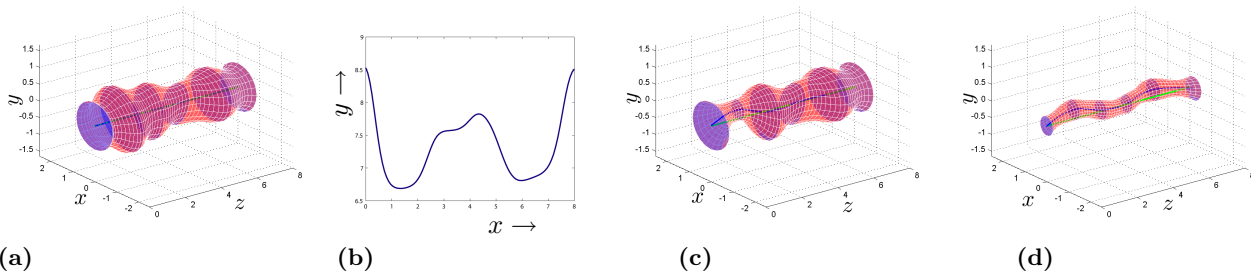


Abbildung 4: Initiale Schätzung (a) mit zugehörigem Gütemaß (b), Schätzung nach einer (c) und sechs Messungen (d).

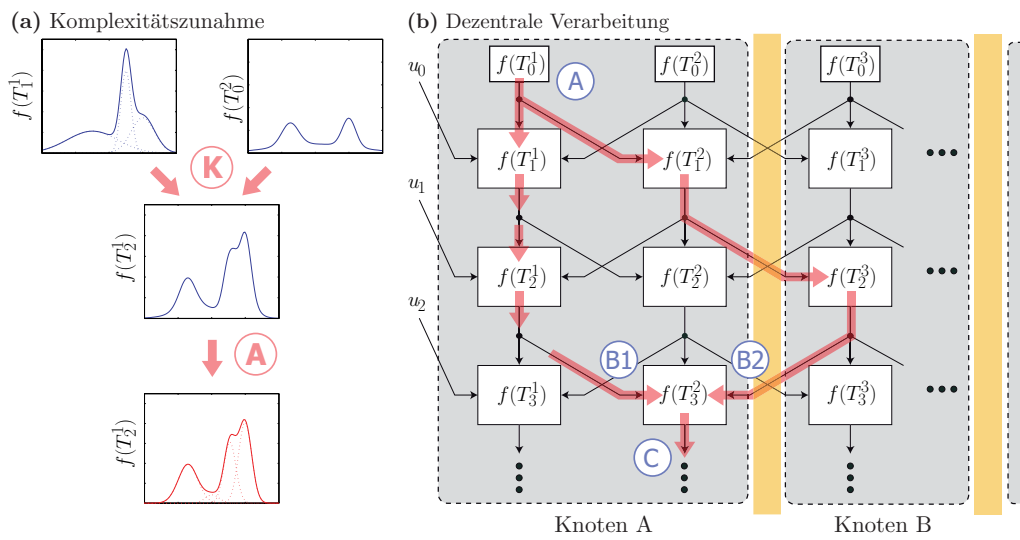


Abbildung 5: Herausforderungen der Informationsfusion für verteilte Systeme, (a) Komplexitätszunahme und (b) dezentrale Verarbeitung.